Exercices complémentaires

« tenter »

Exercice 1

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que X_j suit une loi de Poisson de paramètre λ_j.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
2. Expliciter la loi de X_j sachant $X_1 + \cdots + X_n = k$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X définie par

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x < 0, \\ cxexp(-2x) \text{ pour } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c.
2. Calculer F_x, la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre λ/n.

1. Calculer la fonction de répartition de X_n.
2. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite X_n/n converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 4

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On pose $S_0 = 0$. Pour $t \geq 0$, on définit le processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ par

$$N_t = \sup_{n\geq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{n} S_i \leq t \right\}$$

1. Montrer que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
2. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X de l'exercice 3 de la feuille de TD6 était supposée suivre une loi de Poisson.
3. Proposer une interprétation des variables aléatoires S_n et $S_{n+1} - S_n$.
4. Expliquer pourquoi le temps entre l'arrivée de deux tâches consécutives suit une loi exponentielle. (Penser à discretiser le temps)

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que la loi de X_n est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1/n, \cdots, (n-1)/n, 1\}$.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable X_n.
2. Montrer que la suite (X_n) converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.