Analyse de Fourier

10 décembre 2008

On rappelle la définition des coefficients de Fourier complexes.

Définition 1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable. Soit $T > 0$, et on suppose f T-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f)$ le coefficient de Fourier d'ordre n est défini par*

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_I f(x) \exp(\frac{-2i\pi nx}{T}) dx$$

où I est un intervalle de longueur T, ie $I = [a, a+T]$ pour un réel a.

On note aussi, parfois, $\hat{f}(n)$ le coefficient de Fourier d'ordre n.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ sur l'intervalle $(0, \pi)$, impaire, 2π-périodique. Alors

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(-inx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} - \exp(-inx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(-inx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} - \exp(inx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -2i \sin(nx) dx
\end{aligned}$$

D'où $c_0(f) = 0$, et si $n \neq 0$ on obtient

$$c_n(f) = -\frac{i}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{i}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{1 - (-1)^n}{in\pi}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\begin{aligned}
S(f)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n(f) \exp(inx) \\
&= \sum_{n \neq 0} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} \exp(inx)
\end{aligned}$$

A priori, la série de Fourier d'une fonction n'a pas de raison d'être définie pour tout x, et si elle est bien définie, il se peut qu'elle ne converge pas vers la fonction analysée, même simplement. Cependant, la fonction f étant C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet donne

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) - f(x-0))$$

On a donc

$$\begin{aligned}
1 = f(\frac{\pi}{2}) &= \sum_{n\neq 0} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} \exp(in\frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{2}{i(2p+1)\pi} \exp(i(2p+1)\frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{p\geq 0} \frac{2}{i(2p+1)\pi} \exp(i(2p+1)\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{i(2p+1)\pi} \exp(-i(2p+1)\frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{p\geq 0} \frac{2}{i(2p+1)\pi} [\exp(i(2p+1)\frac{\pi}{2}) - \exp(-i(2p+1)\frac{\pi}{2})] \\
&= \sum_{p\geq 0} \frac{2}{i(2p+1)\pi} 2i\sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{p\geq 0} \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^p}{2p+1}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

Par Bessel-Parseval, on a en outre

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) &= \sum_{p\geq 0} |c_{2p+1}(f)|^2 + |c_{-(2p+1)}(f)|^2 \\
&= \sum_{p\geq 0} \frac{8}{(2p+1)^2\pi^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ceci permet de calculer la somme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, en effet

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} &= \sum_{p\geq 1}\frac{1}{4p^2}+\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}+\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Soit, maintenant, f_1 définie par $f_1(x)=x$ pour $x\in[-1;1)$, 2-périodique. $c_0(f_1)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}xdx=0$. Et pour $n\neq 0$, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}c_n(f_1) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\exp(-in\pi x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{x\exp(-in\pi x)}{in\pi}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-in\pi x)}{in\pi}dx\\ &= \frac{1}{2in\pi}(-\exp(-in\pi)-\exp(in\pi))+\frac{1}{2in\pi}\left[-\frac{\exp(-in\pi x)}{in\pi}\right]_{-1}^{1}\\ &= -\frac{\cos(n\pi)}{in\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{in\pi}\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f_1 est donc

$$S(f_1)(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\frac{(-1)^{n+1}}{in\pi}\exp(in\pi x)$$

On considère désormais la fonction f_2 définie par $f_2(x)=|x|$ pour $x\in[-1;1)$, 2-périodique. On a lors

$$c_0(f_2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{0}^{1}xdx=\frac{1}{2}$$

si $n \neq 0$, il vient en intégrant par parties

$$\begin{aligned}
c_n(f_2) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x| \exp(-in\pi x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -x \exp(-in\pi x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x \exp(-in\pi x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x(\exp(-in\pi x) + \exp(in\pi x))dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2x \cos(n\pi x)dx \\
&= \left[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx \\
&= \left[\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f_2 est alors

$$S(f_2)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \exp(in\pi x)$$

Enfin, on considère, f_3, 2-périodique, définie par

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1;0] \\ 2x \text{ si } x \in (0;1) \end{cases}$$

On obtient alors $c_0(f_3) = \frac{1}{2}\int_0^1 2xdx = \frac{1}{2}$, puis si $n \neq 0$ via une intégration par parties

$$\begin{aligned}
c_n(f_3) &= \int_0^1 x\exp(-in\pi x)dx \\
&= \left[-\frac{x\exp(-in\pi x)}{in\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\exp(-in\pi x)}{in\pi}dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} + \left[\frac{\exp(-in\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Et la série de Fourier de f_3

$$S(f_3)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right] \exp(in\pi x)$$

On reprend la série de Fourier de f_1

$$\begin{aligned} S(f_1)(x) &= \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} \exp(in\pi x) \\ &= \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

On vérifie que f_1 est C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = S(f_1)(\frac{1}{2}) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^{2p+2}}{2p+1} \sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p} \sin(p\pi) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^{2p}(-1)^p}{2p+1} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} \end{aligned}$$

Le théorème de Bessel-Parseval donne également

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2\pi^2}$$

et donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Appliquons le théorème de Bessel-Parseval à la fonction f_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx &= \frac{1}{4} + \sum_{n\neq 0} \frac{((-1)^n - 1)^2}{n^4\pi^4} \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{4}{(2p+1)^4\pi^4} \\ &= \frac{1}{4} + 2\sum_{p\geq 0} \frac{4}{(2p+1)^4\pi^4} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

On peut alors calculer

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}=\sum_{p\geq 1}\frac{1}{16p^4}+\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

et donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}$$