Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 2π-périodique définie pour $x \in (-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Montrer que les coefficients de Fourier complexes de f sont donnés pour $n \in \mathbb{Z}$ par :
$$c_n(f) = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 - in)}$$
où sinh est le sinus hyperbolique dont l'expression est $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
3. Que vaut $S(f)(x)$, la somme de la série de Fourier de f, pour $x \in [-\pi, \pi]$? Justifier. La convergence est-elle uniforme ?
4. Calculer les sommes suivantes :
$$\textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \,; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

Exercice BONUS

Donner la série de Fourier de $(\cos x)^3$.