Il est autorisé d'utiliser les résultats de questions précédantes même si ceux-ci n'ont pas été montrés.

Exercice 1. *On considère la fonction* $f : [\sqrt{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ *par* $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ *et* $x_0 = 2$.

1. *(1pt) Montrer que* f *est croissante sur l'intervalle* $[\sqrt{2}, +\infty[$.
2. *(1.5 pts) Par récurrence, montrer que pour tout* $n \geq 0$, $x_n \geq \sqrt{2}$. *(On pourra utiliser le fait que* f *est croissante sur l'intervalle considéré).*
3. *(1.5 pts) Par récurrence, montrer que* $(x_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante. (On pourra utiliser le fait que* f *est croissante et que* $x_n \geq \sqrt{2}$ *pour tout* $n \geq 0$*).*
4. *(1pt) Rappeler le théorème qui permet de conclure quant à la convergence de* $(x_n)_{n\geq 0}$.
5. *(1pt) (Bonus) Calculer la limite de* $(x_n)_{n\geq 0}$.