

Mathématiques Appliquées

Cours-TD : K. Abdi, M. Huault, B. de Loynes et S. Pommier

TD2 : Dérivation : taux d'accroissement, élasticités, calcul marginal et optimisation**Exercice 1**

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 + 1 ; f_2(x) = \ln(x) ; f_3(x) = \frac{1+x^5}{1-x}$$

$$f_4(x) = \sqrt{4-x^2} ; f_5(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) ; f_6(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

2. Calculer les élasticités des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = x^3 ; g_2(x) = \ln(x) ; g_3(x) = 2x^2 + 1$$

$$g_4(x) = e^{\alpha x} ; g_5(x) = \ln(2x^2 + 1) ; g_6(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

3. Calculer les taux de croissance instantanée des fonctions suivantes :

$$v_1(t) = e^{\alpha t} ; v_2(t) = A^{\gamma t} ; v_3(t) = \frac{4+t}{5-t^2}$$

$$v_4(t) = \ln(\beta t) ; v_5(t) = \sqrt{t+4} ; v_6(t) = t(1-t)$$

Exercice 2K et W sont deux nombres réels strictement positifs et $\alpha \in [0; 1]$.On considère la fonction de production $h(x)$ définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = [\alpha K^x + (1-\alpha)W^x]^{\frac{1}{x}}$$

On pose : $u(x) = \ln[h(x)]$ et $g(x) = \ln[\alpha K^x + (1-\alpha)W^x]$

1. Calculer
- $g'(x)$

2. Vérifier que :

$$u(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

3. En déduire
- $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$
- puis montrer que :
- $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = K^\alpha W^{1-\alpha}$

Exercice 3

Soit la fonction :

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de
- f
- que l'on notera
- D_f

2. Calculer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f .
3. En déduire le tableau de variation de f
4. Sachant que $\ln 4 \approx 1,39$ quel est le signe de $f(x)$ sur D_f
5. Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Exercice 4

Soit la fonction de coût total :

$$CT(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 8$$

1. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$2x^3 - 2x^2 - 8 = 2(x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

2. Calculer et étudier le sens de variation de la fonction de coût moyen.
3. Calculer et étudier le sens de variation de la fonction de coût marginal.
4. Déterminer le seuil de rentabilité*.
5. Déterminer le seuil de fermeture*.

Exercice 5

L'évolution dans le temps t du Produit Intérieur Brut (PIB) nominal (noté Y) est donnée par :

$$Y(t) = 20e^{0,04t}$$

1. Calculer le taux de croissance instantanée de la production.
2. A quelle date la production sera-t-elle doublée ?

La production réelle par habitant est définie par :

$$y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)L(t)}$$

où $P(t)$ représente le niveau général des prix et $L(t)$ le nombre de personnes employées. Les prix progressent selon $P(t) = 100e^{0,02t}$ et le taux de croissance instantanée des personnes employées est de 0,01

3. Calculer le taux de croissance instantanée de la production réelle par habitant.

Exercice 6

Nous examinons l'évolution de la dette publique d'un pays par rapport à son PIB. En temps continu, nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}B'(t) &= rB(t) + D(t) \\Y'(t) &= gY(t)\end{aligned}$$

où B est le montant de dette nominale, D est le montant du déficit *primaire* nominal et Y , le montant du PIB nominal, t est la variable figurant le temps.

1. Interpréter les relations : que peuvent représenter r et g
2. On note le ratio de dette par rapport au PIB $b(t)$ et le ratio de déficit primaire par rapport au PIB $d(t)$. On a ainsi :

$$b(t) = \frac{B(t)}{Y(t)}; d(t) = \frac{D(t)}{Y(t)}$$

- (a) Calculez le taux d'accroissement instantané de $b(t)$
- (b) Si un gouvernement s'engage à ne plus avoir de déficit $d(t) = 0$, comment sa dette va-t-elle évoluer ?
- (c) Un gouvernement s'engage à stabiliser sa dette publique à 60% du PIB et son déficit *public* à 3% du PIB. Que vaut g ? Interpréter.

Nota : la dette est stabilisée lorsque $b'(t) = 0$, le déficit public comprend le déficit primaire plus les intérêts de la dette.

Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad g(x) = 4^{2x-3} \quad w(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 8

On considère la fonction de coût total suivante :

$$CT(x) = \ln x + 4x + 2$$

et la demande

$$x = 5 - \frac{1}{2}p$$

où x désigne les quantités de biens et p le prix.

- (a) Calculer et étudier le coût moyen (sens de variation, limite, extrema)
- (b) Calculer et étudier le coût marginal (sens de variation, limite, extrema)
- (c) Déterminer la fonction de demande réciproque
- (d) Déterminer les quantités et les prix d'équilibre si une seule firme est présente sur ce marché et se comporte comme un monopole. Interpréter

Exercice 9

A Rennes, pour une journée, le coût total (CT en euros) de fonctionnement du métro en fonction du nombre de tickets vendus (x en milliers) est donné par :

$$CT(x) = x + 8$$

La demande journalière en fonction du prix p du ticket est :

$$x = 12 - 2p$$

- (a) Calculer la fonction de demande réciproque $p(x)$.
Combien faut-il vendre de tickets pour que la société de transport maximise sa recette totale journalière (notée $RT(x)$, avec $RT(x) = p(x) \times x$) ?
- (b) Calculer et représenter sur le même graphique les fonctions de recette moyenne (RM), de recette marginale (Rm), de coût moyen (CM) et de coût marginal (Cm).
- (c) Si cette société de transport se comporte comme dans une situation de concurrence pure et parfaite, combien de tickets vendra-t-elle chaque jour et quel sera le prix du ticket ? Quel sera le profit de la société de métro ?
- (d) Mêmes questions si cette société de transport se comporte comme un monopoleur privé.
- (e) Supposons que le prix soit fixé au niveau du coût moyen ($p(x) = CM$), combien de tickets de métro seront vendus ? Quel sera le profit de la société de métro ?
- (f) Comme le prix au coût moyen semble plus raisonnable que le prix privé de monopole et que davantage de voyageurs en profitent, les collectivités locales souhaitent subventionner ce mode de transport, de telle manière que la société ne fasse pas de perte.
Calculer la subvention v qui permet au consommateur de payer un prix concurrentiel et à la société de transport d'avoir un profit nul.